Twierdzenie Liouville'a (praca domowa)

Zasady rozwiązywania. Poniższe siedem zadań należy samodzielnie rozwiązać, a następnie oddać na piśmie. Dopuszczalna jest forma papierowa (czytelnym pismem) i elektroniczna (dokument zredagowany w TeXu lub skan czytelny po wydrukowaniu). Można i należy korzystać z twierdzeń dowiedzionych na wykładzie i ćwiczeniach, ale w przypadku twierdzeń bez nazwy/nazwiska należy wskazać na założenia i tezę wykorzystywanego twierdzenia.

Termin. Rozwiązania należy oddać **do piątku 24 stycznia** (do północy, jeśli chodzi o wersję elektroniczną). W uzgodnionych przypadkach później.

Wprowadzenie. We wszystkich poniższych zadaniach $u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją gładką, a $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ograniczoną funkcją gładką o ograniczonych pochodnych cząstkowych. Zakładamy ponadto, że spełnione jest równanie różniczkowe

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = V(u(t,x)) \qquad \text{dla } (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

oraz *warunek początkowy*

$$u(0,x) = x \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Można temu nadać interpretację fizyczną. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ porusza się cząstka, a jej prędkość zależy od położenia – prędkość cząstki położonej w x jest dana przez $V(x)$. Wówczas $u(t,x)$ opisuje położenie cząstki startującej z x po czasie t.

Zadanie 1. Dla ustalonego t oznaczmy przekształcenie $x \mapsto u(t,x)$ przez u_t. Ustalmy też ograniczony zbiór otwarty $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i wprowadźmy

$$\Omega_t := u(t,\cdot)(\Omega) = \{u(t,x) : x \in \Omega\}.$$

Sprawdzić, że miara $|\Omega_t|$ opisana jest wzorem

$$|\Omega_t| = \int_\Omega |\det D_x u(t,x)|\, \mathrm{d}x. \tag{$\star$}$$

Zadanie 2. Uzasadnić, że macierz różniczki Du_t (a więc macierz wszystkich pochodnych u bez uwzględnienia różniczkowania po t) spełnia warunek początkowy $Du_t(0,x) = \mathrm{id}$ oraz równanie

$$\frac{\partial}{\partial t} Du_t = DV(u_t) \cdot Du_t.$$

Przez powyższą równość rozumiemy, że

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u^i}{\partial x_j}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V^i}{\partial y_k}(u(t,x))\frac{\partial u^k}{\partial x_j}(t,x) \qquad \text{dla } i,j = 1,\dots,n,\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

Zadanie 3. Wykazać, że różniczką przekształcenia $\det\colon M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ w macierzy jednostkowej I jest ślad:

$$D_I \det(B) = \operatorname{tr} B,$$

natomiast w dowolnej macierzy odwracalnej $A \in M_{n\times n}$ mamy

$$D_A \det(B) = (\det A)\cdot \operatorname{tr}(A^{-1}B).$$

Zadanie 4. Wprowadźmy wrońskian:

$$W\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad W(t,x) = \det Du_t(x).$$

Sprawdzić, że $W(0,x) = 1$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Przy założeniu odwracalności macierzy $Du_t(x)$ wyprowadzić wzór

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t,x) = \det Du_t(x)\cdot \operatorname{tr}(DV(u_t(x))).$$

Zadanie 5. Uzasadnić, że $W(t,x) > 0$, a więc wzór z poprzedniego zadania zachodzi dla dowolnych $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.
Wskazówka. Rozważyć funkcję $\ln W(t,x)$. A priori jest ona dobrze określona jedynie dla $t \approx 0$, ale można sprawdzić, że jej pochodna cząstkowa po t jest ograniczona.

Zadanie 6. Uzasadnić, że równanie ($\star$) można zróżniczkować stronami i otrzymać

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Omega_t| = \int_\Omega (\det Du_t(x))\operatorname{tr}(DV(u(t,x)))\,\mathrm{d}x.$$

Definicja. W ostatnim zadaniu interesować nas będzie *nieściśliwość*. Rozumiemy przez to, że cząstki zajmujące w chwili $t = 0$ obszar Ω, po czasie $t > 0$ zajmują obszar Ω_t o takiej samej mierze. Własność taką mają np. modele matematyczne opisujące ruch płynów (nieściśliwych).

Jak wynika z powyższych zadań, ma z tym związek wielkość

$$\operatorname{div} V(y) := \operatorname{tr}(DV(y)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V^k}{\partial y_k}(y),$$

zwaną dywergencją V.

Zadanie 7. Pokazać, że jeśli pole V jest bezdywergencyjne, tzn. $\operatorname{div} V(y) = 0$ dla $y \in \mathbb{R}^n$, to miara obszaru Ω_t jest stała względem t: $|\Omega_t| = |\Omega|$.
Odwrotnie, udowodnić również, że jeśli dowolny obszar Ω ma tę własność, to pole V jest bezdywergencyjne.